UNIVERSIDAD NACIONAL EXPERIMENTAL DE GUAYANA
VICE-RECTORADO ACADEMICO
DEPARTAMENTO DE CIENCIA Y TECNOLOGIA
AREA DE MATEMATICAS

GUIA DE MATEMATICAS I,
CAPITULO III

Prof. Orlando Baisdem Pérez

Puerto Ordaz, Mayo del 2010.

Capítulo 3

Limites y Continuidad

3.1 Limites

Definición 3.1 *Formal de Limite. Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene a c (salvo posiblemente en c) y L un número real. La afirmación*

$$lim_{x \to c} f(x) = L$$

significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que sí
$0 < |x - c| < \delta$, *entonces* $|f(x) - L| < \varepsilon$

Ejemplo 1 *Dado el límite*

$$lim_{x \to 3} 2x - 5 = 1$$

encontrar δ tal que $|(2x - 5) - 1| < 0.01$, siempre que $0 < |x - 3| < \delta$

Solución

En este problema trabajaremos con un $\varepsilon = 0.01$ para encontrar un δ apropiado, se observa que:

$$|(2x - 5) - 1| = |2x - 6| = 2|x - 3|$$

Como la desigualdad $|(2x-5)-1| < 0.01$ es equivalente a $2|x-3| < 0.01$, se puede escoger $\delta = \frac{1}{2}(0.01) = 0.005$. Esta opción funciona porque

$$0 < |x-3| < 0.005$$

lo que implica que

$$|(2x-5)-1| = 2|x-3| < 2(0.005) = 0.01$$

Ejemplo 2 *Utilizar la definición $\varepsilon - \delta$ de limite para demostrar que*

$$lim_{x \to 2}(3x-2) = 4$$

Solución

Probar que para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $|(3x-2)-4| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x-2| < \delta$. Puesto que la elección de δ depende de ε, es necesario establecer una relación entre los valores absolutos $|(3x-2)-4|$ y $|x-2|$.

$$|(3x-2)-4| = |3x-6| = 3|x-2|$$

De tal manera, para cada $\varepsilon > 0$ dado, se puede tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$. Esta opción funciona porque

$$0 < |x-2| < \delta = \frac{\varepsilon}{3}$$

implica que

$$|(3x-2)-4| = 3|x-2| < 3(\frac{\varepsilon}{3}) = \varepsilon$$

Definición 3.2 *Intuitiva de Limite. Decir que $lim_{x \to c} f(x) = L$ significa que cuando x está cerca, pero difiere de c, $f(x)$ está cerca de L.*

Ejemplo 3 *Encuentre el $lim_{x \to 3}(4x-5) =$*

Solución

Cuando x está cerca de 3, $4x - 5$ estará cerca de $4 * 3 - 5 = 7$ y escribimos

$$lim_{x \to 3}(4x - 5) = 7$$

Ejemplo 4 *Encuentre el* $lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$

Solución

$$lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+2)}{x - 3} = lim_{x \to 3}(x + 2) = 3 + 2 = 5$$

Teorema 1 ***Teorema principal sobre límites.*** *Sea n un entero positivo, k una constante, y f y g funciones con límites en c. Entonces,*

1. $lim_{x \to c} k = k$
2. $lim_{x \to c} x = c$
3. $lim_{x \to c} f(x) = f(c)$
4. $lim_{x \to c} k f(x) = k lim_{x \to c} f(x)$
5. $lim_{x \to c}[f(x) \pm g(x)] = lim_{x \to c} f(x) \pm lim_{x \to c} g(x)$
6. $lim_{x \to c}[f(x) * g(x)] = lim_{x \to c} f(x) * lim_{x \to c} g(x)$
7. $lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} \frac{lim_{x \to c} f(x)}{lim_{x \to c} g(x)}$, *dado que* $lim_{x \to c} g(x) \neq 0$
8. $lim_{x \to c}[f(x)]^n = [lim_{x \to c}[f(x)]]^n$
9. $lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)}$, *dado que* $lim_{x \to c} f(x) > 0$ *cuando n es par.*

Ejemplo 5 *Encuentre* $lim_{x \to 2} \frac{7x^5 - 10x^4 - 13x + 6}{3x^2 - 6x - 8}$

Solución

$$lim_{x\to 2}\frac{7x^5-10x^4-13x+6}{3x^2-6x-8}=\frac{7(2)^5-10(2)^4-13(2)+6}{3(2)^2-6(2)-8}=-\frac{11}{2}$$

Ejemplo 6 *Encuentre* $lim_{x\to 2}\sqrt[5]{3x^2-2x}$

Solución

$$lim_{x\to 2}\sqrt[5]{3x^2-2x}=\sqrt[5]{lim_{x\to 2}3x^2-2x}=\sqrt[5]{8}$$

Teorema 2 ***Teorema del Encaje****.*
Supongamos que
$f(x)\leq g(x)\leq h(x)$
para todo x *en algún intervalo* (c,d)*, excepto posiblemente en el punto* $a\in(c,d)$ *y que*

$$lim_{x\to a}f(x)=lim_{x\to a}h(x)=L$$

para algún número L*. Entonces, también*

$$lim_{x\to a}g(x)=L$$

Ejemplo 7 *Hallar el valor de* $lim_{x\to 0}[x^2cos(\frac{1}{x})]$

Solución:
Relacionamos la función parte de ella con un desigualdad sencilla

$$-1\leq cos(\frac{1}{x})\leq 1$$

Multiplicamos todo por x^2

$$-x^2\leq -x^2cos(\frac{1}{x})\leq x^2$$

para todo $x \neq 0$. Además

$$lim_{x\to 0} - x^2 = 0 = lim_{x\to 0}x^2$$

Por tanto, por el teorema del encaje asegura que

$$lim_{x\to 0}x^2cos(\frac{1}{x}) = 0$$

3.2 Limites Laterales (Limites por la derecha y por la izquierda)

Definición 3.3 *Decir que $lim_{x\to c^+}f(x) = L$ significa que cuando x está cerca, pero a la derecha de c, entonces $f(x)$ está cerca de L. En forma semejante, decir que $lim_{x\to c^-}f(x) = L$ significa que cuando x está cerca, pero a la izquierda de $cf(x)$ está cerca de L.*

Teorema 3 ***Existencia de un límite***. *Si f es una función y c y L son números reales, el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a c es L si y sólo sí*
$lim_{x\to c^-}f(x) = L$ y $lim_{x\to c^+}f(x) = L$

Ejemplo 8 *Calcular $lim_{x\to 0}f(x)$ para la función*

$$f(x) = \{^{x^2+2cosx+1, parax<0}_{e^x-4, parax\geq 0}$$

Solución:
Como f está dada por expresiones distintas para $x < 0$ y $x \geq 0$, debemos investigar los límites laterales.

$$lim_{x\to 0^-}f(x) = lim_{x\to 0^-}(x^2 + 2cosx + 1) = 2cos0 + 1 = 3$$

por otra parte

$$lim_{x\to 0^+}f(x) = lim_{x\to 0^+}(e^x - 4) = e^0 - 4 = 1 - 4 = -3$$

Como los limites laterales no coinciden, concluimos que $lim_{x\to 0^+} f(x)$ no existe.

Ejemplo 9 *Determinar si existe el siguiente limite:* $lim_{x\to 2} \frac{2x1}{\sqrt{x-2}}$

Solución:

En primer lugar verificamos si existe el límite por la derecha:

$$lim_{x\to 2^+} \frac{2x1}{\sqrt{x-2}} = \infty$$

Ahora verificamos si existe el limite por la izquierda

$$lim_{x\to 2^-} \frac{2x1}{\sqrt{x-2}} = \infty$$

Este límite no existe ya que cualquier valor que tome la x *menor que* 2 *no genera ningún valor real para la raíz cuadrada. De hecho, los valores menores que* 2 *no pertenecen al dominio de la función definida por el cociente.*

En conclusión el límite buscado no existe.

3.3 Limites Infinitos

Definición 3.4 *Sea* f *una función definida en todo número real de un intervalo abierto que contiene a* c *(salvo, posiblemente, en el propio* c*). La expresión:*

$$lim_{x\to c} f(x) = \infty$$

significa que para toda $M > 0$ *existe una* $\delta > 0$ *tal que* $f(x) > M$*, siempre que* $0 < |x-c| < \delta$*.*

Del mismo modo, la expresión:

$$lim_{x\to c} f(x) = -\infty$$

significa que para todo $N > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que* $f(x) < N$*, siempre que* $0 < |x-c| < \delta$*.*

Para definir el ***limite infinito por la izquierda****, sustituir* $0 < |x-c| < \delta$ *por* $c-\delta < x < c$

Y para definir el ***límite infinito por la derecha****, basta sustituir* $0 < |x-c| < \delta$ *por* $c < x < c+\delta$*.*

Ejemplo 10 *Analizar* $lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$

El comportamiento de $f(x)$ es muy distinto en $x > 0$ y en $x < 0$. Concretamente, cuando $x \to 0^+$, $\frac{1}{x}$ crece sin tope, mientras que cuando $x \to 0^-$, $\frac{1}{x}$ decrece sin tope.

x	$\frac{1}{x}$
0.1	10
0.01	100
0.001	1000
0.0001	10000
0.00001	100000

x	$\frac{1}{x}$
-0.1	-10
-0.01	-100
-0.001	-1000
-0.0001	-10000
-0.00001	-100000

Es claro que el Limite no existe, sin embargos utilizaremos limites laterales para analizar el problema.

$$lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = \infty$$
$$lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = -\infty$$

Esto significa que la gráfica de $y = \frac{1}{x}$ se acerca a la recta vertical $x = 0$ cuando $x \to 0$. Cuando esto ocurre decimos que la recta $x = 0$ es una asintota vertical.

3.3.1 Asintotas Verticales

Definición 3.5 *Si $f(x)$ tienede a infinito (o menos infinito) cuando x tiende a c por la derecha o por la izquierda, se dice que la recta $x = c$ es una* ***asintota vertical*** *de la gráfica*

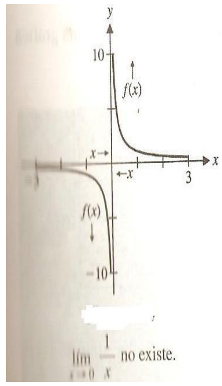

Figura 3.1: El limite no existe

de f.

Teorema 4 ***Asintotas Verticales***. *Sean f y g funciones continuas en un intervalo abierto que contiene a c. Si $f(c) \neq 0$, $g(c) = 0$, y existe un intervalo abierto que contiene a c tal que $g(x) \neq c$, entonces la gráfica de la función*

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

tiene una asíntota vertical en $x = c$.

Ejemplo 11 *Determinar todas las asíntotas verticales de la gráfica de*

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4}$$

Solución

Simplificamos la expresión

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4}$$

$$f(x) = \frac{(x+4)(x-2)}{(x+2)(x-2)}$$

$$f(x) = \frac{(x+4)}{(x+2)}$$

$x \neq -2$

En consecuencia existe una asintota vertical en $x = -2$.

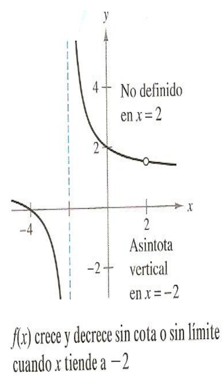

Figura 3.2: El limite no existe

A partir de la gráfica se ve que

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4} = -\infty$$

y

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4} = \infty$$

Ejemplo 12 *Evaluar*

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$$

3.4 Limites al Infinito

Definición 3.6 *Si los valores de la función $f(x)$ tieneden al número L cuando x aumenta sin limites, se escribe*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

De manera similar se escribe

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = M$$

cuando los valores de la función $f(x)$ tienden al número M cuando x disminuye sin limites.

3.5 Algunas indeterminaciones

3.5.1 Limites $\frac{\infty}{\infty}$

Cunado la expresión dada es una fracción y al sutituir la varianble por su valor (∞), el limites es $\frac{\infty}{\infty}$. Para eliminar la indeterminación se suele dividir tanto el numerador como el denominador por la variable de mayor grado.

1. Si la variable de mayor grado esta en el numerador el resultado es infinito.
2. Si la variable de mayor grado esta en el denominador el resultado es cero.
3. Si la variable de mayor grado esta en el numerador y en el denominador el resultado es el cociente de los coeficientes.

Ejemplo 13 *Hallar*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x-4}{\sqrt{3x^2-7}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x-4}{\sqrt{3x^2-7}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5x-4}{4}}{\frac{\sqrt{3x^2-7}}{x}} = \frac{-5}{\sqrt{3}} = \frac{-5\sqrt{3}}{3}$$

3.5.2 Limites $\frac{0}{0}$

Cuando la expresión dada es una fracción por su valor (número real) el limite es (0/0) para eliminar la indeterminación se procede de la siguiente forma:

1. Factorizar el numerador y el denominador y simplifique la expresión dada hasta donde sea posible.

2. Si aparecen radicales en el denominador se multiplica por la expresión conjugada, hasta eliminar la indeterminación.

Ejemplo 14 *Hallar*

1. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

2. $\lim_{x\to 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

3. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2-2\sqrt[3]{x}+1}}{(x-1)^2}$

Solución

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = 4$$

$\lim_{x\to 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49} = \frac{2-\sqrt{4}}{7^2-49} = \frac{0}{0}$

Multiplicamos y dividimos por la conjugada del numerador

$$\lim_{x\to 7} \frac{(2-\sqrt{x-3})(2+\sqrt{x-3})}{(x^2-49)(2+\sqrt{x-3})} = \lim_{x\to 7} \frac{4-(x-3)}{(x^2-49)(2+\sqrt{x-3})}$$

$$\lim_{x\to 7}\frac{(7-x)}{(x-7)(x+7)(2+\sqrt{x-3})}=\lim_{x\to 7}\frac{-(7+x)}{(x-7)(x+7)(2+\sqrt{x-3})}=\lim_{x\to 7}\frac{-1}{(x+7)(2+\sqrt{x-3})}=\frac{-1}{56}$$

Solución

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2-2\sqrt[3]{x}+1}}{(x-1)^2}=\frac{0}{0}$$

Se hace un cambio de variable $x=y^3$

$$\lim_{y\to 1}\frac{\sqrt[3]{(y^3)^2-2\sqrt[3]{(y^3)}+1}}{((y^3)-1)^2}=\lim_{y\to 1}\frac{y^2-2y+1}{(y^3-1)^2}$$

$$\lim_{y\to 1}\frac{(y-1)(y-1)}{(y-1)^2(y^2+y+1)^2}=\frac{1}{9}$$

3.5.3 Limites $\infty-\infty$

1.− Hallar

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3})=\infty-\infty$$

Multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3})(\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3})}{(\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3})}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+8x+3-x^2-4x-3)}{(\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3})}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{(\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3})}=\frac{\infty}{\infty}$$

Como seguimos encontrando una indeterminación dividimos toda la expresión por la variable de mayor potencia.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{8x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{4x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{8}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}=\frac{4}{2}=2$$

3.6 Limites de Funciones Trigonométricas

Limites Básicos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - cosx}{x} = 0$$

Hallar los siguientes límites:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{1-cosx}{x}$

2. $\lim_{x\to 0} xcotx$

3. $\lim_{x\to 0} \frac{Tg3x}{Tg5x}$

Solución

1. $\lim_{x\to 0} \frac{1-cosx}{x} = \frac{0}{0}$ Para romper la indeterminación multiplicamos y dividimos por la conjugada del numerador

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - cosx}{x} * \frac{1 + cosx}{1 + cosx} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - cos^2 x}{x(1 + cosx)} = \lim_{x\to 0} \frac{sen^2 x}{x(1 + cosx)} = \lim_{x\to 0} (\frac{senx}{x} \frac{senx}{1 + cosx}) = 1*0 = 1$$

2. $\lim_{x\to 0} xcotx$ Al aplicar el limite encontramos una indeterminación, en consecuencia, obtamos por la siguiente estrategia:

$$\lim_{x\to 0} xcotx = \lim_{x\to 0} (x\frac{cosx}{senx}) = \lim_{x\to 0} (\frac{x}{senx} cosx) = \lim_{x\to 0} \frac{cosx}{\frac{senx}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

3. $\lim_{x\to 0} \frac{Tg3x}{Tg5x} = \frac{0}{0}$
Para romper la inderminación transformamos las tangentes en senos y cosenos, recordando que:

$$Tagx = \frac{senx}{cosx}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{Tg3x}{Tg5x} = \lim_{x\to o} \frac{\frac{sen3x}{cos3x}}{\frac{sen5x}{cos5x}} = \lim_{x\to 0} \frac{Sen3xCos5x}{Sen5xCos3x}$$

Ahora es importante obtener las expresiones: $\frac{Sen3x}{3x}$ y $\frac{Sen5x}{5x}$
Para ello incorporamos $3x$ y $5x$ al limite sin alterarlo:

$$\lim x \to 0 \frac{3x\frac{sen3x}{3x}cos5x}{5x\frac{sen5x}{5x}cos3x}$$

$\frac{3}{5}$ Sale del limite y las x se cancelan; aplicando las propiedades de los límites de un cociente y de un producto, se obtiene finalmente

$$= \frac{3}{5} * \frac{1}{1} * \frac{1}{1} = \frac{3}{5}$$

3.7 Limites de Funciones Exponenciales y Logaritmicas

Limites Básicos

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^k}{e^x} = 0$

2. $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^k} = \infty$

3. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

4. $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{k}{x})^x = e^k$

5. $\lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}} = e^k$

6. $\lim_{x\to a}(\frac{g(x)}{h(x)})^{h(x)} = e^{\lim_{x\to a} h(x)(\frac{f(x)}{h(x)}-1)}$

7. $\lim_{x\to\infty} \frac{lnx}{x} = 0$

8. $\lim_{x\to 0} \frac{ln(1+kx)}{x} = k$

Hallar los siguientes Límites

1. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x}$

2. $\lim_{x\to\infty}(\frac{2x+1}{x+2})^{\frac{1}{x-1}}$

3. $\lim_{x\to\infty}(\frac{3x+2}{3x-1})^x$

4. $\lim_{x\to 1} \frac{lnx}{x^2-1}$

Solución

1. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x} = \frac{0}{0}$
   A continuación factorizamos

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)(e^x+1)}{x}$$

Aplicando propiedades de los limites

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)(e^x+1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)}{x}*\lim_{x\to 0}e^x+1=1*2=2$$

2. $\lim_{x\to 1}(\frac{2x+1}{x+2})^{\frac{1}{x-1}}=1^\infty$

$$\lim_{x\to 1}(\frac{2x+1}{x+2})^{\frac{1}{x-1}}=e^{\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}(\frac{2x+1}{x+2}-1)}=e^{\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}(\frac{2x+1-x-2}{x+2})}=e^{\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}(\frac{x-1}{x+2})}=e^{\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+2}}=e^{\frac{1}{3}}$$

3. $\lim_{x\to\infty}(\frac{3x+2}{3x-1})^x$

Solución

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{3x+2}{3x-1})^x=1^\infty=\infty$$

Ahora bien, trataremos de romper la icon el siguiente procedimiento:

Aplico una de polinomios

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{3x+2}{3x-1})^x=\lim_{x\to\infty}(1-\frac{4}{x+3})^{x+3-1}$$

Aplicamos un cambio de variable

$x+3=y\therefore y=-4z$

$$\lim_{z\to\infty}(1-\frac{4}{-4z})^{-4z-1}=\lim_{z\to\infty}(1+\frac{1}{z})^{-4z-1}=e^{-4}*1=e^{-4}$$

4. $\lim_{x\to 1}\frac{lnx}{x^2-1}$

Solución

$$\lim_{x\to 1}\frac{lnx}{x^2-1}=\frac{0}{0}$$

Eliminamos la indeterminación haciendo el siguiente cambio de variable

$$x=1+y\to y=x-1$$

En consecuencia, cuando $x \to 1$ entonces $y \to 0$

$$\lim_{x\to 1} \frac{lnx}{x^2-1} = \lim_{y\to 0} \frac{ln(1+y)}{y(y+2)} = \lim_{y\to 0}[\frac{ln(1+y)}{y}\frac{1}{y+2}]$$

$$\lim_{y\to 0}[\frac{ln(1+y)}{y}] * \lim_{y\to 0} \frac{1}{y+2}] = 1 * \frac{1}{0+2} = \frac{1}{2}$$

3.8 Continuidad en un Punto y en un intervalo abierto

Definición 3.7 *Una función f es continua en c su se satisfacen las tres condiciones:*

1. $f(c)$ *esta definida*
2. $\lim_{x\to c} f(x)$ *existe*
3. $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

Definición 3.8

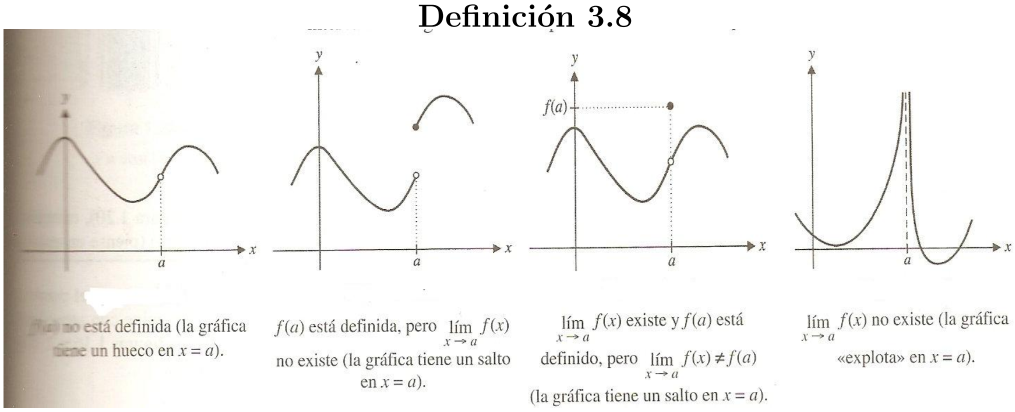

Figura 3.3: Continuidad de funciones

Continuidad en un intervalo abierto: Una función es continua en un intervalo abierto (a, b) si es continua en cada punto del intervalo. Una función continua en la recta de los números reales enteros $(-\infty, \infty)$ es continua en todas sus partes

3.9 Tipos de discontinuidades

Si una función f esta definida en I (excepto, posiblemente, en c) y no es continua en c, se dice que f tiene una discontinuidad en c. Las discontinuidades se clasifican en dos categorias: **evitables o removibles** e **inevitables o no removibles**. Se dice que una discontinuidad en c es evitable o removible si f se puede hacer continua definiendo (o redefiniendo) apropiadamente $f(c)$.

Teorema 5 *Continuidad de un polinomio. Una función polinómica es continua en todo número real.*

Teorema 6 *Una función racional es continua en todos los números reales de su dominio.*

Ejemplo 15 *Discutir la continuidad de:*

$$f(x) = \begin{cases} 5 - xsi\ -1 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 1si\ 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

Solución:

Como $5 - x$ y $x^2 - 1$ son funciones polinómicas, entonces son continuas en los intervalos $[-1, 2)$ y $(2, 3]$ respectivamente. Podriamos deducir que $g(x)$ es continua en $[-1, 3]$; por lo que comprobaremos el comportamiento de g para $x = 2$.

$$\lim_{x \to 2^-} (5 - x) = 3$$
$$\lim_{x \to 2^+} (x^2 - 1) = 3$$

Como ambos limites son iguales

$$\lim_{x \to 2} g(2) = 3$$

En consecuencia la función es continua.

Ejemplo 16 *Analizar la continuidad de :*

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$$

Solución:

Observemos que:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+3)}{x - 1} = x + 3, para x \neq 1$$

Por lo tanto la gráfica de f es una recta con un agujero en $x = 1$, f es discontinua en $x = 1$ y continua en todos los demás puntos.

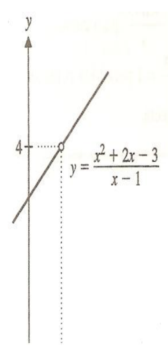

Figura 3.4: Continuidad de una función racional

Ejemplo 17 *Redefina la función anterior en un único punto de modo tal que la nueva función sea continua en todas partes :*

Solución:

La función del ejemplo anterior era discontinua en $x = 1$ porque no estaba definida en ese valor de x, ahora la definiremos

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2x-3}{x-1} \text{si } x \neq 1 \\ a, \text{si } x = 1 \end{cases} .$$

para algún número real a.

Por tanto, si elegimos $a = 4$, tenemos

$\lim_{x\to 1} g(x) = 4 = g(1)$

y, en consecuencia, g es continua en $x = 1$

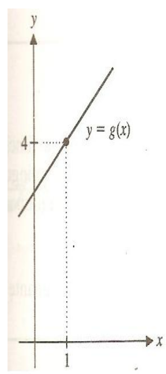

Figura 3.5: Una discontinuidad que se puede evitar

Ejemplo 18 ***Ejercicios***

Hallar

1. $\lim_{x\to 2} \sqrt{\frac{x^3+2x+3}{x^2+5}}$

2. $\lim_{r\to 1} \sqrt{\frac{8r+1}{r+3}}$

3. *Dada*

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 si\ x \leq 1 \\ 2 + x^2 si\ x > 1 \\ 20, si\ x = 1 \end{cases}.$$

Encontrar

(a) *Gráfica*

(b) *Limite bilateral para* $x \to 1$

4. $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2})^{\frac{2n+1}{2}}$

5. $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{3-\frac{2}{n}}{2+n})^{n+2}$

6. *Dado* $f(x) = \frac{3x^2}{x^2+1}$
Hallar

(a) $\lim_{x\to 3}$

(b) $\lim_{x\to\infty}$

(c) $\lim_{x\to-\infty}$

7. $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3-3x^2-4}{7x^3+x-2}$

8. $\lim_{x\to\infty} \frac{7x^3+x-2}{5x^3-3x^2-4}$

9. $\lim_{x\to\infty} \frac{7x^2+x-2}{5x^3-3x^2-4}$

10. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{5x^3-3}}{x}$

11. *Dado* $f(x) = \frac{5}{(x-2)^2}$
    Hallar

    (a) *Gráfica*

    (b) $\lim_{x\to 0}$

    (c) $\lim_{x\to 2^+}$

    (d) $\lim_{x\to 2^-}$

12. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$

13. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$

14. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

15. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+senx}-\sqrt{1-senx}}{x}$

16. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{x}$

17. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin mx}{x}$

18. $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3})$

19. $\lim_{x\to 1} \frac{4x^2-3x+1}{x^2-1}$

20. $\lim_{x\to\infty} 4^{-(x+5)}$

21. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-16}{x^3-8}$

22. $\lim_{x\to 81} \frac{x-81}{\sqrt{x}-9}$

23. $\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)(x+2)}{(x+4)(x+3)}$

24. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{cosx}{1+senx}$

25. $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}$

26. $\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{x}}$

27. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

28. $\lim_{x\to\infty}(\frac{2x-1}{2x+1})^x$

29. $\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$

30. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

31. $\lim_{x\to 0}(\frac{1+\frac{1}{5x}}{)}^{x}$

32. $\lim_{x\to+\infty}(\frac{x^2-x-1}{x^2+2})^{-3-x}$

33. $\lim_{\theta\to 0}\frac{\tan\theta-\sin\theta}{\theta^3}$

34. $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin(\theta-\frac{\pi}{3})}{1-2cos\theta}$

35. $\lim_{x\to 0}\frac{sin4x}{3x}$

36. $\lim_{x\to 0}\frac{cosx+3x-1}{5x}$

37. $\lim_{t\to 0}\frac{t+tant}{sent}$

Analizar la continuidad de las siguientes funciones:

Dado $f(x)=\frac{5}{(x-2)^3}$
Hallar

1. *Gráfica*
2. $\lim_{x\to 0}$
3. $\lim_{x\to 2^+}$
4. $\lim_{x\to 2^-}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{2x-x^2}{3x+5}$

Dada

$$f(x) = \begin{cases} 3 + x si\ x < 1 \\ 3 - x si\ x \geq 1 \end{cases}.$$

Encontrar

1. *Analizar la continuidad de:*

Dada

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2 si\ x < 2 \\ 6 - x si\ x \geq 2 \end{cases}.$$

Dada

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 si\ x \leq 2 \\ 2x + 1 si\ x > 2 \end{cases}.$$

Dada

$$f(x) = \begin{cases} e^x si\ x < 1 \\ lnx si\ x \geq 1 \end{cases}.$$

Dada

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} si\ x < 1 \\ 2x - 1 si\ x \geq 1 \end{cases}.$$