مؤسسة :  الثانية باك ع ر فرض2

تمرين 1 a و b عددان حقيقيان بحيث: $0 \le a \prec b$

1 - باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية بين أن : $\dfrac{b-a}{1+b^2} \le Arc\tan b - Arc\tan a \le \dfrac{b-a}{1+a^2}$

2 - أ- استنتج أن $\forall x \in IR^{+*} : \dfrac{x}{1+x^2} \le Arc\tan x \le x$

ب- حدد النهاية : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{Arc\tan(x)-x}{x^2}$

3 - استنتج حساب النهاية : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{Arc\tan(\frac{x}{x+1})-x}{x^2}$

تمرين 2

نعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x) = Arc\tan(\dfrac{x\sqrt{3}-1}{x+\sqrt{3}})$

1 - حدد D_f والنهايات عند محداته

2 - نضع: $x = \tan\alpha$ حيث: $-\dfrac{\pi}{2} \prec \alpha \prec \dfrac{\pi}{2}$. بين أن: $\forall x \in D_f : f(x) = Arc\tan(\tan(\alpha - \dfrac{\pi}{6}))$

3 - بين أن : $(\forall x \in \left]-\sqrt{3},+\infty\right[: f(x) = Arc\tan x - \dfrac{\pi}{6})$ ثم حدد صيغة $f(x)$ على المجال $\left]-\infty,-\sqrt{3}\right[$

4 - هل يمكن تمديد f بالاتصال في النقطة $-\sqrt{3}$ ؟

5 - حل في IR المعادلة : $f(x) = \dfrac{\pi}{6}$

6 - ليكن g قصور الدالة f على المجال $I = \left]\sqrt{3},+\infty\right[$ بين أن g تقابل من المجال I إلى مجال J يتم تحديده . حدد تعبير $g^{-1}(x)$ لكل x من J

7 - أنشئ منحنى الدالة g ومنحنى الدالة g^{-1} في نفس المعلم المتعامد المنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

تمرين3

نعتبر الدالة f المعرفة على $\left]0;+\infty\right[$ ب: $f(x) = 3.\sqrt[3]{x}$

1) أحسب : $f'(x)$ بالنسبة ل $x \in \left]0,+\infty\right[$

2) أ- بين أن : $\forall k \in IN^*; \exists c \in \left]k;k+1\right[: 3.(\sqrt[3]{k+1} - \sqrt[3]{k}) = \dfrac{1}{c^{\frac{2}{3}}}$

ب- استنتج أن : $\forall k \in IN^* : \dfrac{1}{\sqrt[3]{(k+1)^2}} \le 3.(\sqrt[3]{k+1} - \sqrt[3]{k}) \le \dfrac{1}{\sqrt[3]{k^2}}$

3) بالنسبة ل $n \ge 1$ نضع: $u_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{2^2}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{3^2}} + \dots + \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$

أ- بين أن : $\forall n \in IN^* : u_n \ge 3.\sqrt[3]{n+1} - 3$ ثم استنتج : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

ب- بين أن : $\forall n \in IN^* : 3.\sqrt[3]{n+1} - 3 \leq u_n \leq 3.\sqrt[3]{n}$ ثم أحسب : $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{\sqrt[3]{n}}$